Práctica 4
Transformaciones

1. Sea P un punto en el interior de un rectángulo $ABCD$. Probar que existe un cuadrilátero cuyos lados tengan longitudes PA, PB, PC, PD y sus diagonales sean perpendiculares e iguales a los lados del rectángulo.
2. Sea P un punto en el interior de un triángulo equilátero ABC. Probar que existe un triángulo cuyos lados tengan longitudes PA, PB, PC y angulos iguales a $\angle BPC - 60°, \angle APC - 60°$ y $\angle APB - 60°$.
3. Sea $ABCD$ un cuadrado con P y Q en BC y CD tales que $\angle BAP = \angle PAQ$. Probar que $BP+DQ = AQ$.
4. Dados A, P y B en una recta, sean C y D del mismo lado respecto a la recta tales que PAC y PBD sean triángulos equiláteros. Si M y N son los puntos medios de AD y BC probar que PMN tambien es equilátero.
5. Dadas tres rectas paralelas construir un triángulo equilátero con un vértice en cada una de ellas. Probar que los triángulos que verifican las condiciones son todos iguales y hallar el lugar geométrico que describe su circuncentro.
6. Dadas tres rectas concurrentes, construir un cuadrado con un vértice en cada una de ellas. Entre todos los posibles cuadrados que verifican las condiciones del problema. ¿Cuál es el lugar geométrico del cuarto vértice?
7. Dado un triángulo, construir un triángulo inscripto que tenga lados paralelos a tres rectas dadas. Construir también un cuadrado inscripto con dos vértices en un lado y un vértice en cada uno de los otros dos.
8. Dadas dos rectas y un punto, trazar una circunferencia tangente a ambas rectas que pase por el punto.
9. Párese frente a un espejo empañado y con un ojo cerrado marque el contorno de su cara. ¿Por qué tiene la mitad del ancho y altura reales, independientemente de su distancia al espejo?
10. Consideremos dos circunferencias tangentes en un punto P. Si una recta por P corta a las circunferencias en los puntos A y B probar que las tangentes a las circunferencias en A y B son paralelas.
11. Probar que si la composición de tres homotecias es la identidad sus centros están alineados y que si la composición de tres rotaciones es la identidad sus centros forman un triángulo con angulos la mitad de los angulos de rotación.
12. Consideremos tres circunferencias no concéntricas dos a dos. Para cada par de circunferencias marcamos la intersección de las dos tangentes exteriores en común. Demostrar que estos tres puntos están alineados.
13. Dado un triángulo dibujamos cuadrados externos sobre dos de sus lados. Probar que el punto medio del tercer lado y los centros de los dos cuadrados forman un triángulo rectángulo isosceles.
14. Explicar cómo reconstruir un triángulo a partir de los puntos medios de sus lados. Mismo problema pero con los puntos medios de dos de sus lados y otro punto en el tercer lado que lo divida en proporción $2 : 1$.
15. Dado un cuadrilátero se dibujan en cada lado un triángulo equilátero exterior. Si se borra el cuadrilátero original reconstruir la figura. ¿Qué pasa si en vez de triángulos equiláteros dibujamos triángulos rectángulos isosceles?
16. Dados un segmento y puntos P y Q construir un triángulo ABC tal que los puntos A, P y B esten alineados, en ese orden y a razon $2 : 1$, el segmento BC sea igual y paralelo al segmento y el triángulo AQC sea equilátero.
17. Dado un cuadrilátero convexo se divide cada lado en 5 partes iguales y usando estos puntos se divide al cuadrilátero en 25 cuadriláteros más chicos. Probar que los segmentos dibujados quedan divididos en 5 partes iguales.
18. La hipotenusa de un triángulo rectángulo se mueve de forma que sus vértices siempre se mantienen en dos rectas perpendiculares. ¿Cuál es el lugar geométrico del tercer vértice?
19. ¿Cuál es el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos equiláteros inscriptos en un triángulo ABC?
20. **Lema de los 9:** Sean $ABC, A'B'C'$ y $A''B''C''$ triángulos semejantes. Probar que si $AA'A''$ y $BB'B''$ son semejantes entre sí entonces tambien lo son con el triángulo $CC'C''$.